

総合演習 15

重複順列で考えると、分母は 6^n 通り

(1)

3で割り切れない順列は1,2,4,5の重複を許す順列より、 4^n 通り。

よって、3で割り切れる順列は、 $6^n - 4^n$

よって、求める確率は $\frac{6^n - 4^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \dots$ (答)

(2)

コツは、ある特定の数に注目して、排反に分類すること

6を含めば、それだけで完結するが、6を含まない場合は3と偶数が必要だから、まず、順列を6を含まない場合と含む場合に排反に分類する。

6を含まない順列の総数は1,2,3,4,5の重複を許す順列より 5^n

よって、6を含む順列、すなわち6で割り切れる順列の数は $6^n - 5^n$ 通り \dots ①

続いて、6を含まない場合の順列について考える。

このときの6で割り切れない順列の場合の数は、

(2と4の両方ともでない) \cup (3が出ない) より、

(2と4の両方ともでない場合の数) + (3が出ない場合の数)

− {(2と4の両方ともでない) \cap (3が出ない)}

よって、 $3^n + 4^n - 2^n$ 通り

6を含まない場合の順列の数は 5^n だから、

この場合の6で割り切れる順列の数は $5^n - (3^n + 4^n - 2^n)$ \dots ②

①, ②より、

求める確率は、

$$\frac{6^n - 5^n + 5^n - (3^n + 4^n - 2^n)}{6^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots$$
 (答)

(3)

4を含めば、それで完結するが、4を含まない場合は偶数が2つ必要だから、

まず、順列を4を含まない場合と含む場合に排反に分類する。

4を含まない順列の総数は1,2,3,5,6の重複を許す順列より 5^n

よって、4を含む順列、すなわち4で割り切れる順列の数は $6^n - 5^n$ 通り \dots ③

続いて、4を含まない場合の順列について考える。

この順列のうち、4で割り切れない順列は、1,2,3,5,6についての n 個の順列が、

奇数のみの場合、奇数と2が1個の場合、奇数と6が1個の場合に排反に分類できる。

奇数のみの場合の順列 $= 3^n$

奇数と2が1個の場合の順列 $= 2$ の入れ方 n 通り \times 残りの $n-1$ 個の奇数の順列 3^{n-1} 通り
 $= n \cdot 3^{n-1}$

同様に、奇数と 6 が 1 個の場合の順列 = $n \cdot 3^{n-1}$

よって、4 で割り切れない順列の数は、 $3^n + 2n \cdot 3^{n-1}$

4 を含まない場合の順列の数は 5^n だから、

この場合の 4 で割り切れる順列の数は $5^n - (3^n + 2n \cdot 3^{n-1}) \dots \textcircled{4}$

③, ④より、求める確率は、

$$\frac{6^n - 5^n + 5^n - (3^n + 2n \cdot 3^{n-1})}{6^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots \text{(答)}$$